EXERCICE N°1 : 20' 4 points

Pour tout entier non nul n on pose $I_n = \int_0^{\pi/4} tg^n x \, dx$.

1) Justifier l'existence de I_n. Montrer que la suite I est une suite décroissante à termes positifs.

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de I_n.

EXERCICE N°2 : 25' 5 points

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} \, dx$ et $u_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1) a) Calculer u_0 et montrer que u est décroissante.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$, puis déduire $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n+5)\, u_{n+1} = (2n+2)\, u_n$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2^{2n+2}\, n!\, (n+1)!}{(2n+3)!}$. c) Calculer alors $\int_0^1 (x^2 - 2x + 3)\sqrt{1-x} \, dx$.

EXERCICE N°3 : 25' 5 points

Soit u et v les suite définies par : $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$ et $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot u_n$, $n \geq 1$.

1) a) Montrer que pour tout entier $p \geq 1$, $\int_p^{p+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$.

b) Montrer que pour tout entier $p \geq 2$, $\int_{p-1}^{p} \frac{dx}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{p}}$.

c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $-2 + 2\sqrt{n+1} \leq u_n \leq -1 + 2\sqrt{n}$.

2) Déterminer les limites éventuelles des suites u et v.

EXERCICE N°4 : 30' 5 points

Soit f la fonction définie sur $]-1/2, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}$.

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Etudier la position de ζ_f par rapport à la droite $\Delta : y = x$. **3)** Tracer Δ et ζ_f.

4) Soit $I = \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{2x+1}} \, dx$. **a)** Donner une interprétation graphique de I. **b)** Calculer I.

5) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1/2, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer dans le même repère que ζ_f, la courbe de $\zeta_{f^{-1}}$.

c) Déterminer l'aire de la partie limitée par ζ_f et $\zeta_{f^{-1}}$.